Análise Numérica - Trabalho Prático 2

Diogo Cordeiro Hugo Sales Pedro Costa

Motivação

Pretende-se usar os métodos de Newton e iterativo simples para determinar um valor aproximado de um zero de

$$x^2 - cos(x)^2$$

1.a)

Optamos por implementar o algoritmo pedido em C++ devido à possiblidade da aplicação de templates e lambdas. Deste modo, foi-nos possível implementar os dois métodos pedidos partindo de um algoritmo genérico pois a diferença entre o método de Newton e o método iterativo consiste apenas na fórmula de recorrência. Assim, o método de Newton pode ser visto como uma forma do método iterativo simples.

```
template<typename step_func>
double find_root(double x0, double epsilon, step_func step, long iter_limit) {
    double x1 = x0, err;
    long iter = 1;
    do {
        x0 = x1;
        x1 = step(x0);
        err = std::abs(x1 - x0);
    } while(err > epsilon && iter++ < iter_limit);
    return x1;
}

template<typename F_t, typename dF_t>
double newton(double x0, double epsilon, F_t F, dF_t dF, long iter_limit) {
    return find_root(x0, epsilon,
                     [&F, &dF](double x0){ return x0 - F(x0)/dF(x0); },
                     iter_limit);
}

int main() {
    auto F = [](double x){ return std::pow(x, 2.0) - std::pow(std::cos(x), 2.0); };
    auto dF = [](double x){ return 2.0 * x + std::sin(2.0 * x); };

    double epsilon = 5.0 * std::pow(10.0, -12.0);

    std::cout << newton(0.8, epsilon, F, dF, 100000) << '\n';
}
```

1.b)

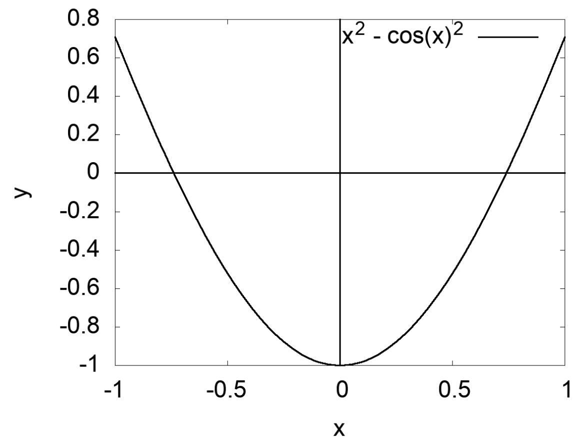

Figure 1: Gráfico para $x \in [-1; 1]$

Como $\forall x : cos^2(x) \in [0 : 1]$, temos que $x^2 \geq cos^2(x)$ para $|x| > 1$, sabemos que o comportamento de $f(x)$ é dominado pelo comportamento de x^2, a qual só tem duas raízes.

A menor das raízes encontra-se no intervalo $]-\infty; 0]$ e a maior destas em $[0; \infty[$.

Através da análise do gráfico, verificamos que o intervalo $[0.7; 0.8]$ contém uma raíz. Definimos então $a = 0.7$ e $b = 0.8$.

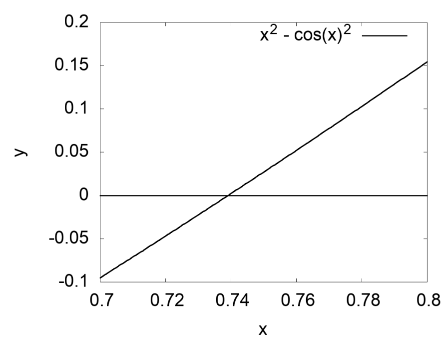

Figure 2: Gráfico para $x \in [0.7; 0.8]$

1.c)

Queremos mostrar que as condições de aplicabilidade do método de Newton são satisfeitas no intervalo. Assim,

$$F(x) = x^2 - cos(x)^2$$

$$F'(x) = 2 \cdot x + sin(2 \cdot x)$$

$$F''(x) = 2 + 2 \cdot cos(2 \cdot x)$$

Como todas estas funções são compostas partindo de somas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, são também continuas no intervalo considerado, verificando-se assim o primeiro critério.

Dado que,

$$F(a) < 0, F(b) < 0 \Rightarrow F(a) \cdot F(b) < 0$$

Verifica-se também o segundo critério.

Temos que $F''(x) = 2 + 2 \cdot cos(2 \cdot x)$, logo $cos(2 \cdot x) \in [-1; 1]$, por isso $2 \cdot cos(2 \cdot x) \in [-2; 2]$, e $2 \cdot cos(2 \cdot x) + 2 \in [0; 4]$ o que implica que $F''(x) \geq 0$, para $x \in \mathbb{R}$ e por isso $F'(x)$ é não decrescente em $\mathbb{R}$, ou seja, $F'(b) \geq F'(a)$ e $F'(a) > 3$ e por isso $F'(x) \neq 0 \forall x :\in [a; b]$, o que verifica o terceiro critério.

Como foi dito anteriormente, $F''(x) \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e, por isso, também para $\forall x :\in [a; b]$, verificando-se a quarta condição.

Para $x_0 = b$, temos que $F(x_0) > 0$ e $F''(x_0) > 0$, logo $F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0$, verificando-se a quinta condição.

Então a sucessão gerada converge para a unica raíz no intervalo $[a; b]$.

1.d)

Aplicamos o programa apresentado em $1.a$ e obtivemos os seguintes resultados.

Iterações	Erro estimado	Valor
1	5.9e-02	0.740528800196
2	1.4e-03	0.739086050826
3	9.2e-07	0.739085133216
4	3.7e-13	0.739085133215

Verficamos que o erro estimado é aproximadamente metade do erro estimado da iteração amterior, o que justificamos com o facto de que o resultado teórico nos dizer que o erro converge segundo uma secessão de segunda ordem.

1.e)

Aplicando a fórmula

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{a \leq x \leq b} |F''(x)|}{\min\limits_{a \leq x \leq b} |F'(x)|}$$

Como $F''(x)$ é decrescente em $[0; \pi/2]$, então $\max\limits_{a \leq x \leq b} |F''(x)| = |F''(a)|$ e como $F'(x)$ é não decrescente em $\mathbb{R}$, $\min\limits_{a \leq x \leq b} |F'(x)| = F'(a)$.

Assim, obtemos $M = \frac{F''(0.7)}{2F'(0.7)} \leq \frac{2.4}{2 \cdot 2.3} \leq 0.53$ e $n \geq \frac{ln(\alpha)}{ln(2)}, \alpha = \frac{ln(5 \cdot 10^{-14}) + ln(0.53)}{ln(0.53) + ln(10^{-1})}$, logo $\alpha \leq \frac{-32}{2.9} \leq 12$ e $n \geq 4$, ou seja que com 4 iterações conseguimos um erro absoluto inferior a $5 \cdot 10^{-14}$.

2.a)

Dada a implementação genérica do algoritmo, o método iterativo simples pode ser implementado sucintamente como:

```
template<typename F_t>
double fixed_point(double x0, double epsilon, F_t f, long iter_limit) {
    return find_root(x0, epsilon, f, iter_limit);
}
```

e usado como

```
auto f = [](double x){ return std::cos(x); };
std::cout << fixed_point(0.8, epsilon, f, 100000) << '\n';
```

A expressão de `f` foi obtida por manipulação algébrica do seguinte modo:

$$F(x) = 0 \iff x^2 - cos^2(x) = 0 \iff x^2 = cos^2(x) \iff x = \pm cos(x)$$

Logo no intervalo $[a; b]$, temos que $x = cos(x)$ ou seja $f(x) = cos(x)$.

2.b)

Aplicando o programa supra apresentado, obtivemos os seguintes erros:

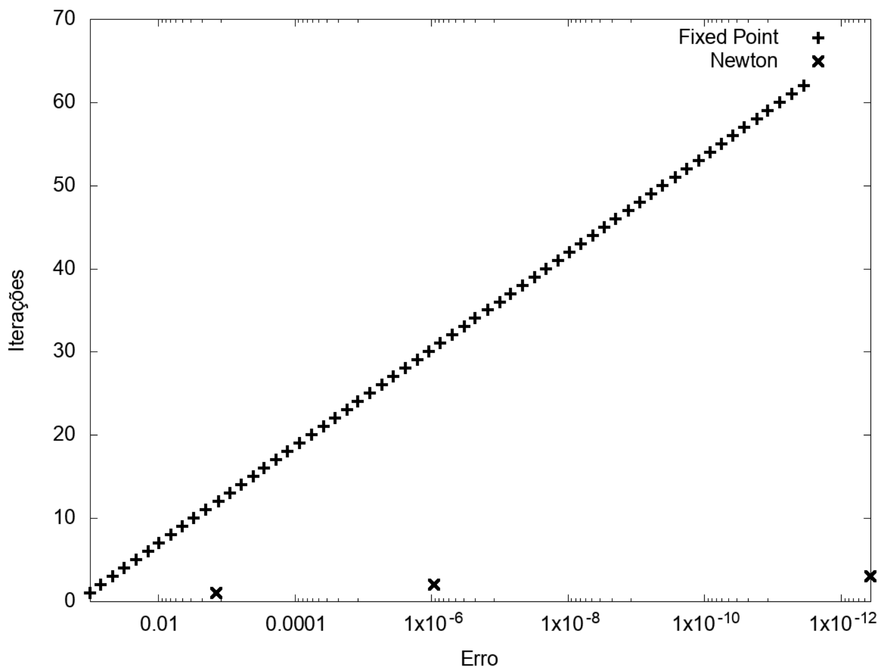

Figure 3: Gŕafico da comparação do erro estimado dos dois métodos

Partindo destes resultados, verificamos empiricameente a diferença na ordem de convergência dos dois métodos.

Obtivemos como valor final para este método o valor 0.739085133217, que difere do valor calculado como o método de Newton em $-2 \cdot 10^{-12}$, por isso concluimos numericamente que, para os valores iniciais usados, este método pode ser aplicado, sendo que aproxima o valor real.

Verificando as condições de aplicabilidade deste método, temos que $f(x)$ é continua em $[a; b]$, verificando-se a primeira condição, que $f(0.7) \approx 0.76484219$ e $f(0.7) \approx 0.69670671$ o que implica que $f([a; b]) \notin [a; b]$, o implica que não se verifica a segunda condição e que $\forall x \in [0.7; 0.8] : |-sin(x)| < 1$, o que significa que se verifica a terceira condição.

Apesar de não se verificar a segunda condição, verificamos na mesma a convergência da sucessão, o que não contradiz os resultados teóricos, uma vez que estas condições são suficientes, mas não necessárias para esta convergência.